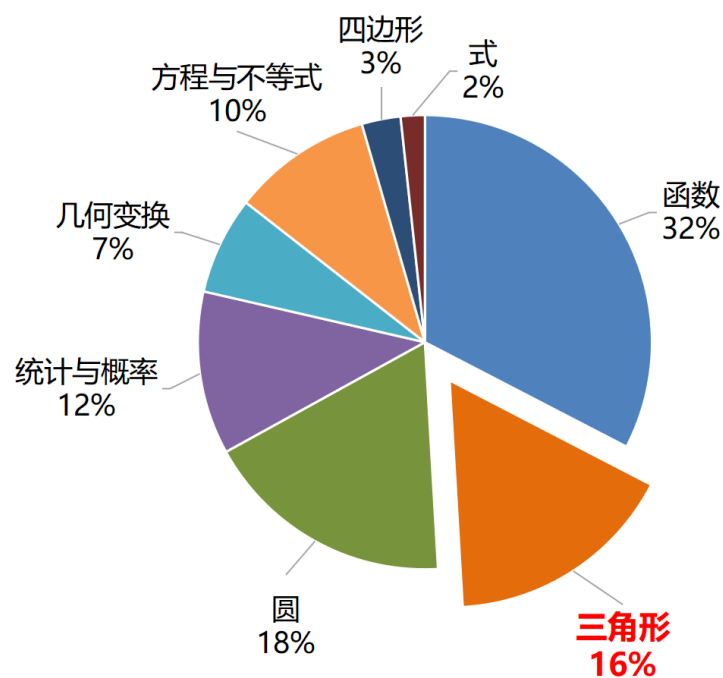


相似三角形进阶一

知己知彼

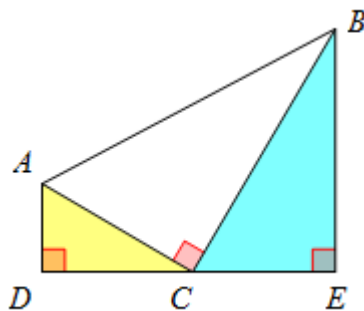


- ★相似三角形的性质与判定
- ★相似三角形的基本模型

一、三垂直及三等角模型综合

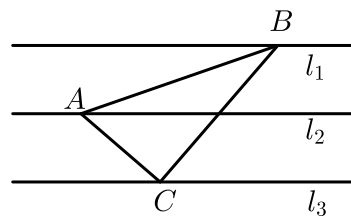
1. 一线三垂直

已知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $AC \neq BC$ ， $AD \perp DE$ 于点 D ， $BE \perp DE$ 于点 E 。



|| 例题

1. 如图，将 30° 的直角三角板的三个顶点分别放置在三条等距离的平行线 l_1 ， l_2 ， l_3 上，若 $AC = 1$ ，则 l_1 ， l_2 之间的距离为（ ）。



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

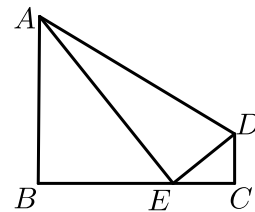
B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{1}{2}$

练习

2. 如图, $AB \perp BC$, $DC \perp BC$, E 是 BC 上一点, 使得 $AE \perp DE$.

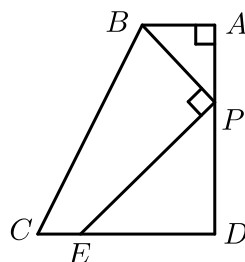


(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle ECD$.

(2) 若 $AB = 4$, $AE = BC = 5$, 求 ED 的长.

例题

3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 2$, $AD = 5$, P 是 AD 上一动点 (点 P 不与 A 、 D 重合), $PE \perp BP$, PE 交 DC 于点 E .



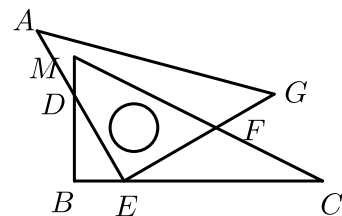
(1) 求证: $\triangle ABP \sim \triangle DPE$.

(2) 设 $AP = x$, $DE = y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围.

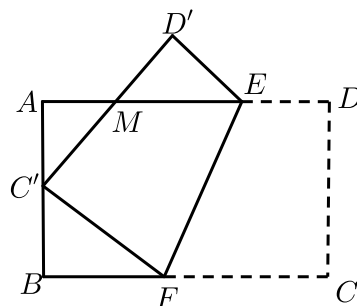
(3) 请你探索在点 P 运动的过程中, 四边形 $ABED$ 能否构成矩形? 如果能, 求出 AP 的长; 如果不能, 请说明理由.

练习

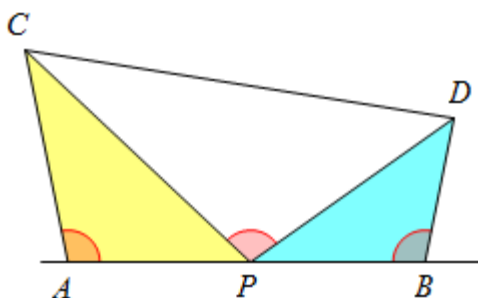
4. 一副三角板 ($\triangle BCM$ 和 $\triangle AEG$) 如图放置, 点 E 在 BC 上滑动, AE 交 BM 于 D , EG 交 MC 于 F , 且在滑动过程中始终保持 $EF = DE$. 若 $MB = 4$, 设 $BE = x$, $\triangle EFC$ 的面积为 y , 则 y 关于 x 的函数表达式是 ().



- A. $y = 2\sqrt{3}x$ B. $y = 2\sqrt{3}x + 1$ C. $y = x(4\sqrt{3} - x)$ D. $y = \frac{1}{2}x(4\sqrt{3} - x)$
5. 如图, 将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠, 使顶点 C 恰好落在 AB 边的中点 C' 上, 点 D 落在 D' 处, $C'D'$ 交 AE 于点 M . 若 $AB = 6$, $BC = 9$, 则 AM 的长为 _____.

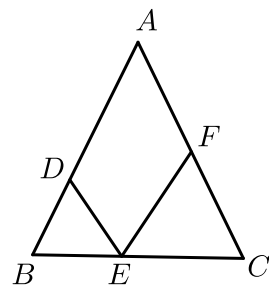


2. 一线三等角



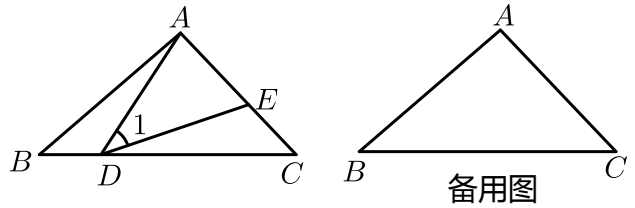
|| 例题

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 6$ ， $BC = 5$ ， D 是 AB 上一点， $BD = 2$ ， E 是 BC 上一动点，连接 DE ，并作 $\angle DEF = \angle B$ ，角的一边 EF 交线段 AC 于 F 。



- (1) 求证： $\triangle DBE \sim \triangle ECF$.
(2) 当 F 是线段 AC 中点时，求线段 BE 的长 .
(3) 连接 DF ，如果 $\triangle DFE \sim \triangle DEB$ ，求 FC 的长 .

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上，连接 AD 、 DE ，且 $\angle 1 = \angle B = \angle C$ 。



(1) 由题设条件，请写出三个正确结论：(要求不再添加其他字母和辅助线，找结论过程中添加的字母和辅助线不能出现在结论中，不必证明)

答：结论一：_____。

结论二：_____。

结论三：_____。

(2) 若 $\angle B = 45^\circ$ ， $BC = 2$ ，当点 D 在 BC 上运动时(点 D 不与 B 、 C 重合)，

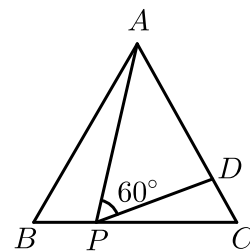
① 求 CE 的最大值。

② 若 $\triangle ADE$ 是等腰三角形，求此时 BD 的长。

(注意：在第(2)的求解过程中，若有运用(1)中得出的结论，须加以证明)

练习

8. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， P 为 BC 上一点， D 为 AC 上一点， $\angle APD = 60^\circ$ ， $BP = 1$ ， $CD = \frac{2}{3}$ 。



(1) 证明： $\triangle PCD \sim \triangle ABP$.

(2) 求： $\triangle ABC$ 的周长 .

9. 解答下列问题 .

(1) 如图1 , 在四边形 $ABCD$ 中 , 点 P 为 AB 上一点 , $\angle DPC = \angle A = \angle B = 90^\circ$. 求证 :

$$AD \cdot BC = AP \cdot BP .$$

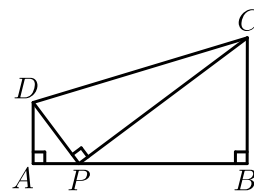


图1

(2) 如图2 , 在四边形 $ABCD$ 中 , 点 P 为 AB 上一点 , 当 $\angle DPC = \angle A = \angle B = 40^\circ$ 时 , 求证 :

$$AD \cdot BC = AP \cdot BP .$$

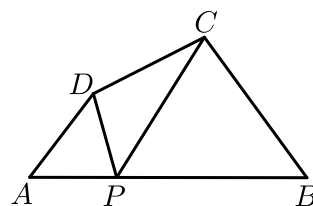


图2

(3) 如图3 , 在 $\triangle ABD$ 中 , $AB = 6$, $AD = BD = 5$, 且满足 $\angle DPC = \angle A$. 求证 :

$$AD \cdot BC = AP \cdot BP .$$

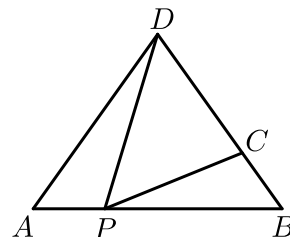


图3

二、相似三角形常用辅助线

常见辅助线作法

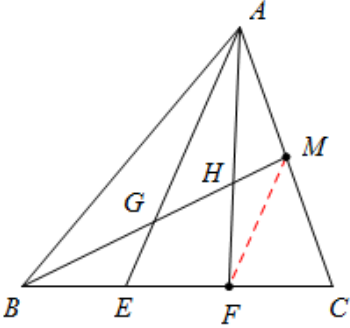
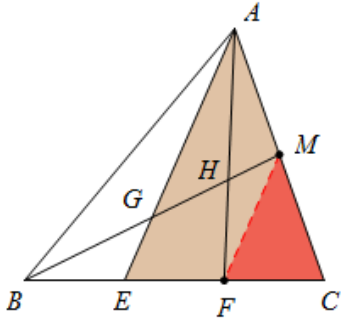
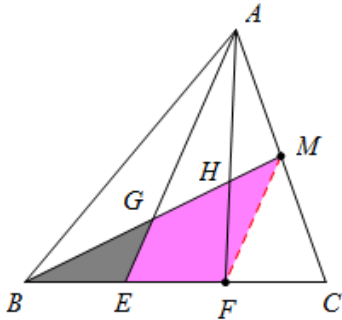
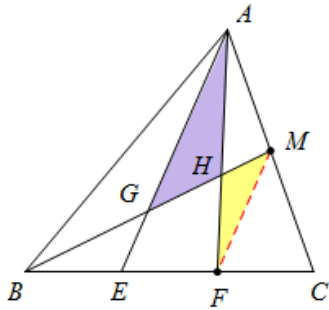
过_____构造平行线

过_____构造平行线

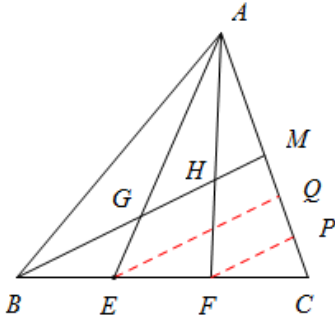
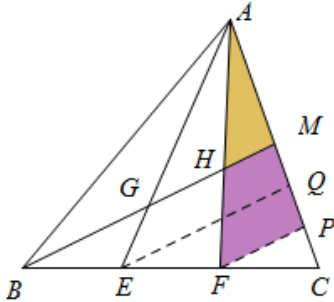
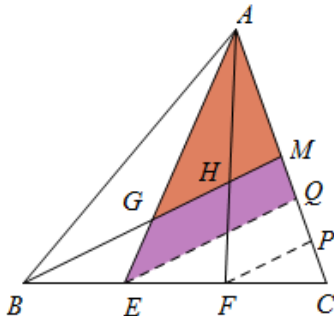
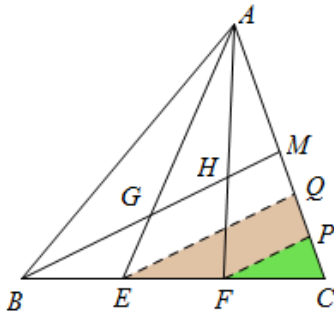
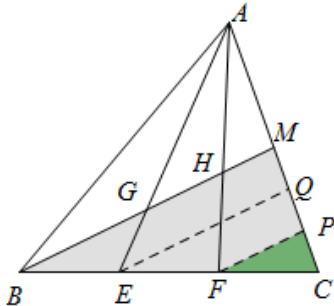
过_____构造平行线

1. 连中点构造相似

 方法一 通过中点，构造中位线，找平行，出相似。

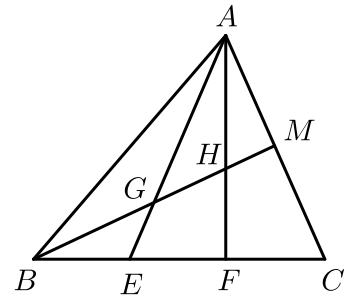
连接 MF ，构造中位线	得到的“A”字或“8”字相似
	
	
	

方法二 由三等分点构造平行线分线段成比例，找线段间的关系。

过点 E 、 F 作 MB 的平行线	目的	得到相似模型
	确定 HM 和 PF 的关系	
	确定 GM 和 PF 的关系	 
	确定 BM 和 PF 的关系	

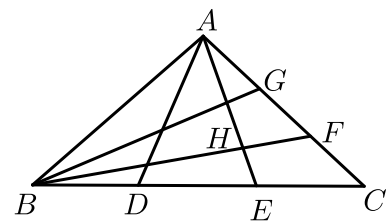
例题

10. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， E 、 F 为 BC 的三等分点， M 为 AC 的中点， BM 与 AE 、 AF 分别交于 G 、 H ，求 $BG : GH : HM$ 的值。



练习

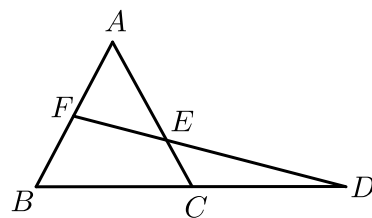
11. 如图所示， $\triangle ABC$ 的面积为3， D 、 E 、 F 、 G 分别是 BC 、 AC 边上的三等分点， AE 、 BF 相交于点 H ，则四边形 $CEHF$ 的面积是_____。



2. 过断点作平行

|| 例题

12. 如图，延长 $\triangle ABC$ 的边 BC 到点 D ，使 $BC = CD$ ，取 AB 的中点 F ，连接 DF 交 AC 于点 E ．求 $EC : AC$ 的值．



练习

13. 已知：线段 $OA \perp OB$ ， C 点为线段 OB 上一点， D 为线段 OA 上一点，连接 AC ， BD 交于点 P 。

(1) 如图1，当 $OA = OB$ ，且 C 、 D 分别为线段 OB 、 OA 的中点时，则 $\frac{AP}{PC}$ 的值为_____。

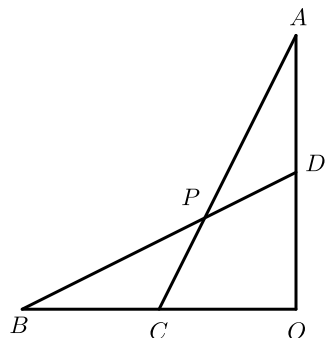


图1

(2) 如图2，当 $OA = OB$ ， C 为线段 OB 的中点，且 $\frac{AD}{AO} = \frac{1}{3}$ 时，求 $\frac{AP}{PC}$ 的值。

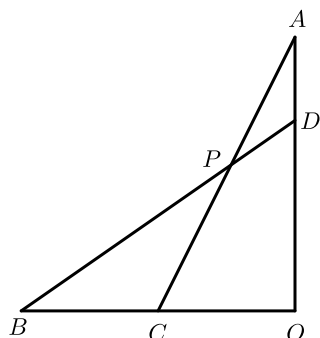


图2

(3) 如图3，当 $\frac{AD}{AO} = \frac{1}{n}$ ($n > 1$)， $\frac{BC}{BO} = \frac{1}{m}$ 时，直接写出 $\frac{AP}{PC}$ 的值。(用 m ， n 表示)

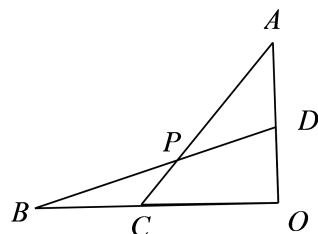


图3

3. 过顶点作平行

例题

14. 阅读下面材料：

某同学遇到这样一个问题：如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， BE 是 AC 边上的中线，点 D 在 BC 边上， $CD : BD = 1 : 2$ ， AD 与 BE 相交于点 P ，求 $\frac{AP}{PD}$ 的值。

他发现，过点 A 作 $AF \parallel BC$ ，交 BE 的延长线于点 F ，通过构造 $\triangle AEF$ ，经过推理和计算能够使问题得到解决（如图2）。

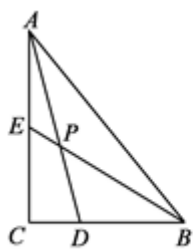


图 1

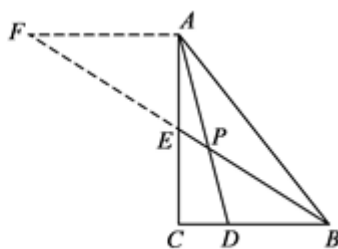


图 2

请回答：

(1) $\frac{AP}{PD}$ 的值为_____。

(2) 参考这个同学思考问题的方法，解决问题：

如图3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 在 BC 的延长线上， AD 与 AC 边上的中线 BE 的延长线交于点 P ， $DC : BC : AC = 1 : 2 : 3$ 。

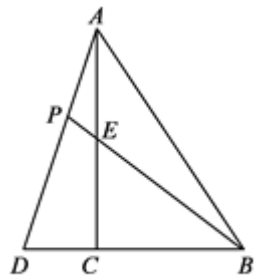


图 3

① 求 $\frac{AP}{PD}$ 的值。

② 若 $CD = 2$ ，则 $BP =$ _____。

练习

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别为边 AC 、 BC 上靠近点 C 的三等分点， BD 、 AE 交于点 F ，求 $DF:BF$ 的值。

